

Ein einfacher Beweis für den Satz von FEUERBACH mit koordinatenfreien Vektoren

Stefan Götz · Franz Hofbauer

Eingegangen: 30. März 2016 / Angenommen: 9. November 2016 / Online publiziert: 1. Dezember 2016
© Der/die Autor(en) 2016. Dieser Artikel ist eine Open-Access-Publikation.

Zusammenfassung Mit Hilfe von koordinatenfreien Vektoren werden sehr einfache Beweise für die EULER-Formel und den Satz von FEUERBACH gegeben. Wir führen dazu eine elementare Methode an, um Abstände zwischen besonderen Punkten im Dreieck zu berechnen. Es stellt sich heraus, dass alle hier behandelten Punkte als Linearkombinationen der Ortsvektoren des Inkreismittelpunktes und des Höhenschnittpunktes dargestellt werden können, wenn der Umkreismittelpunkt des Dreiecks als Koordinatenursprung gewählt wird. So kann auch die Existenz von Geraden, auf denen mehr als zwei dieser Punkte liegen, gezeigt werden.

1 Einleitung

Einer der bekanntesten Sätze der Dreiecksgeometrie ist der Satz von FEUERBACH. Er besagt, dass der Neunpunktekreis den Inkreis und die drei Ankreise eines Dreiecks berührt. Das Hauptresultat dieser Arbeit ist ein sehr einfacher Beweis dieses Satzes.

Wir wählen dazu den Umkreismittelpunkt als Ursprung eines Koordinatensystems und arbeiten mit koordinatenfreien Vektoren. Diese Methode, den Umkreismittelpunkt als Nullpunkt zu wählen, wird insbesondere verwendet, wenn Geometrie mit Hilfe komplexer Zahlen betrieben wird, siehe [6]. So lassen sich besondere Punkte eines Dreiecks sehr einfach als Linearkombinationen der Ortsvektoren zu den Eckpunkten des Dreiecks darstellen und damit lässt sich auch ihre Existenz zeigen. Wir geben weiterhin eine Formel an, mit der man die Norm von solchen Linearkombinationen in Abhängigkeit vom Umkreisradius und den Seitenlängen des Dreiecks

S. Götz (✉) · F. Hofbauer

Institut für Mathematik, Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien, Österreich

E-Mail: stefan.goetz@univie.ac.at

F. Hofbauer

E-Mail: franz.hofbauer@univie.ac.at

bestimmen kann. Damit können wir Abstände zwischen diesen besonderen Punkten ausrechnen. Außerdem finden wir durch diese Darstellungen Geraden, auf denen mehr als zwei besondere Punkte liegen.

In Abschn. 2 werden konkret Höhenschnittpunkt, Inkreismittelpunkt und die Ankreismittelpunkte auf diese Weise eingeführt. Den Neunpunktekreis definieren wir durch Mittelpunkt und Radius. Als erstes Resultat ergibt sich daraus ein Beweis dafür, dass die neun Punkte, nach denen er benannt ist, auf eben diesem Kreis liegen.

Die EULER-Formel (auch: Satz von EULER) gibt den Abstand zwischen Um- und Inkreismittelpunkt in Abhängigkeit vom Um- und Inkreisradius eines Dreiecks an, und die Abstände zwischen Umkreismittelpunkt und den Ankreismittelpunkten eines Dreiecks. Eine erste Anwendung der oben erwähnten Formel ist ein einfacher Beweis dieses berühmten Zusammenhangs.

Eine weitere Anwendung bestimmt die Abstände vom Mittelpunkt des Neunpunktekreises zum Inkreismittelpunkt und zu den Ankreismittelpunkten. Auf diese Weise wird der Satz von FEURBACH kurz und prägnant bewiesen. Herkömmliche Beweise zum Vergleich findet man in [9], S. 200 ff., wo es auf S. 200 heißt: „Of the numerous proofs which have been contributed to the history of this theorem, none is really simple.“, in [2], S. 37 ff., oder in [6], S. 96 ff. In [12] findet man einen Beweis, der ebenfalls mit koordinatenfreien Vektoren arbeitet. Allerdings sind auch dort die Rechnungen komplizierter.

In Abschn. 3 werden dann etliche weitere besondere Punkte mit koordinatenfreien Vektoren untersucht: Schwerpunkt, BEVAN-Punkt, SPIEKER-Punkt, NAGEL-Punkt und LONGCHAMPS-Punkt. Es stellt sich heraus, dass ihre Ortsvektoren als Linearkombinationen der Ortsvektoren von Höhenschnittpunkt und Inkreismittelpunkt geschrieben werden können.

Besondere Punkte des Dreiecks werden in [8] und [2] mit anderen Methoden untersucht.

2 Die EULER-Formel und der Satz von FEUERBACH

Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Umkreisradius r und Seitenlängen a , b und c . Wir wählen ein Koordinatensystem, dessen Nullpunkt der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ist. Die Ortsvektoren zu den Eckpunkten A , B und C des Dreiecks nennen wir \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} . Dann gilt $a = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$, $b = \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$, $c = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ und $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = r$.

Wir geben zu Beginn den Ortsvektor des Höhenschnittpunktes an, der sich in diesem Koordinatensystem als einfache Linearkombination der Ortsvektoren der Eckpunkte darstellen lässt.

Satz 1 Sei $\mathbf{h} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$. Dann ist \mathbf{h} der Ortsvektor zum Höhenschnittpunkt H des Dreiecks $\triangle ABC$.

Beweis Es gilt $\langle \mathbf{h} - \mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 = r^2 - r^2 = 0$. Somit steht $\mathbf{h} - \mathbf{w}$ senkrecht auf $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Der Punkt mit Ortsvektor \mathbf{h}

erfüllt also die Gleichung $\langle \mathbf{x} - \mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = 0$ der Höhe durch den Eckpunkt C . Ebenso zeigt man $\langle \mathbf{h} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{w} \rangle = 0$ und $\langle \mathbf{h} - \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = 0$, das heißt, der Punkt mit Ortsvektor \mathbf{h} liegt auch auf den Höhen durch die Eckpunkte B und A . Dieser Punkt ist somit der Höhenschnittpunkt H . \square

Sei nun N der Mittelpunkt der Strecke \overline{UH} . Wir definieren einen Kreis mit Mittelpunkt N und Radius $\frac{1}{2}r$ und werden im folgenden Satz sehr einfach beweisen, dass es sich dabei um den Neunpunktekreis handelt (vgl. Abb. 1). Da U der Nullpunkt ist, ist $\mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{h} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$ der Ortsvektor des Punktes N .

Satz 2 (Neunpunktekreis) Seien H_a, H_b und H_c die Höhenfußpunkte und M_a, M_b und M_c die Seitenmitten des Dreiecks $\triangle ABC$. Sei H der Höhenschnittpunkt und R_a, R_b und R_c die Mittelpunkte der Strecken $\overline{HA}, \overline{HB}$ und \overline{HC} . Dann liegen die neun Punkte $H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c, R_a, R_b$ und R_c auf dem Kreis mit Mittelpunkt N und Radius $\frac{1}{2}r$. Das ist also der Neunpunktekreis.

Beweis Wir beweisen nur, dass die Punkte M_c, R_c und H_c auf dem in Rede stehenden Kreis, dem Neunpunktekreis liegen. Der Ortsvektor zum Mittelpunkt M_c der Seite \overline{AB} ist $\mathbf{m}_c = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$. Der Ortsvektor zum Mittelpunkt R_c des Höhenabschnitts \overline{HC} ist $\mathbf{r}_c = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v} + \mathbf{w}$. Es gilt $\|\mathbf{n} - \mathbf{m}_c\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\| = \frac{r}{2}$ und $\|\mathbf{n} - \mathbf{r}_c\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\| = \frac{r}{2}$. Somit liegen M_c und R_c auf dem Neunpunktekreis.

Sei $\mathbf{e} = \overrightarrow{NH_c}$. Es gilt $\overrightarrow{M_cH_c} = \overrightarrow{NH_c} - \overrightarrow{NM_c} = \mathbf{e} - \mathbf{m}_c + \mathbf{n} = \mathbf{e} + \frac{1}{2}\mathbf{w}$ und $\overrightarrow{R_cH_c} = \overrightarrow{NH_c} - \overrightarrow{NR_c} = \mathbf{e} - \mathbf{r}_c + \mathbf{n} = \mathbf{e} - \frac{1}{2}\mathbf{w}$. Da $\overrightarrow{M_cH_c}$ und $\overrightarrow{R_cH_c}$ orthogonal sind, erhalten wir $\langle \mathbf{e} + \frac{1}{2}\mathbf{w}, \mathbf{e} - \frac{1}{2}\mathbf{w} \rangle = 0$ (das gilt auch im Fall $H_c = M_c$ oder $H_c = R_c$). Wegen $\langle \mathbf{e} + \frac{1}{2}\mathbf{w}, \mathbf{e} - \frac{1}{2}\mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{e}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{w}\|^2$ ergibt sich $\|\mathbf{e}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\| = \frac{r}{2}$. Das bedeutet, dass auch H_c auf dem Neunpunktekreis liegt. \square

Im Beweis von Satz 2 zeigt sich schon eine Eigenheit der von uns gewählten Methode: während die Ortsvektoren der Streckenmittelpunkte sofort als Linearkombinationen von \mathbf{u}, \mathbf{v} und \mathbf{w} darstellbar sind, gelingt dies für den Ortsvektor von H_c nicht.

Neben dem Ortsvektor des Höhenschnittpunktes H aus Satz 1 spielt jener des Inkreismittelpunktes I eine große Rolle in unserer Arbeit. Er wird im folgenden Satz angegeben, dabei bezeichnen wir den halben Umfang des Dreiecks mit s , es gilt also $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Satz 3 Der Ortsvektor zum Inkreismittelpunkt I ist $\mathbf{m} = \frac{a}{2s}\mathbf{u} + \frac{b}{2s}\mathbf{v} + \frac{c}{2s}\mathbf{w}$.

Beweis Den Inkreismittelpunkt finden wir als Schnittpunkt der drei Winkelsymmetralen des Dreiecks. Parameterdarstellungen dieser Winkelsymmetralen sind $\mathbf{u} + \lambda_1(\frac{1}{c}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \frac{1}{b}(\mathbf{w} - \mathbf{u}))$, $\mathbf{v} + \lambda_2(\frac{1}{c}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \frac{1}{a}(\mathbf{w} - \mathbf{v}))$ und $\mathbf{w} + \lambda_3(\frac{1}{b}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \frac{1}{a}(\mathbf{v} - \mathbf{w}))$. Setzt man $\lambda_1 = \frac{bc}{2s}$ in der ersten Parameterdarstellung, $\lambda_2 = \frac{ac}{2s}$ in der zweiten und $\lambda_3 = \frac{ab}{2s}$ in der dritten, dann erhält man jedes Mal \mathbf{m} . Somit ist \mathbf{m} der Ortsvektor zu einem Punkt, der auf allen drei Winkelsymmetralen liegt. Das ist der Inkreismittelpunkt I . \square

Es werden hier also Parameterwerte für die Parameterdarstellungen der drei Winkelsymmetralen angegeben, die alle zum gleichen Punkt führen. Wie kommt man auf diese? – Das Gleichsetzen zweier Parametergleichungen führt auf eine Vektorgleichung mit den Vektordifferenzen $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ und $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ (oder entgegengesetzt orientiert), die natürlich linear abhängig sind. Durch Ersetzen von z. B. $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ durch $\mathbf{w} - \mathbf{v} - (\mathbf{u} - \mathbf{v})$ bekommt man eine Gleichung, die den Nullvektor als Linearkombination zweier linear unabhängiger Vektoren darstellt. Nullsetzen der Koeffizienten liefert die gesuchten Parameterwerte.

Für die Ortsvektoren der Ankreismittelpunkte gehen wir genauso vor.

Satz 4 Die Ortsvektoren zu den Mittelpunkten I_a , I_b und I_c der Ankreise sind $\mathbf{m}_a = -\frac{a}{2(s-a)}\mathbf{u} + \frac{b}{2(s-a)}\mathbf{v} + \frac{c}{2(s-a)}\mathbf{w}$, $\mathbf{m}_b = \frac{a}{2(s-b)}\mathbf{u} - \frac{b}{2(s-b)}\mathbf{v} + \frac{c}{2(s-b)}\mathbf{w}$ und $\mathbf{m}_c = \frac{a}{2(s-c)}\mathbf{u} + \frac{b}{2(s-c)}\mathbf{v} - \frac{c}{2(s-c)}\mathbf{w}$.

Beweis Den Ankreismittelpunkt I_c finden wir als Schnittpunkt der äußeren Winkelsymmetralen durch die Eckpunkte A und B und der inneren Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt C . Parameterdarstellungen dieser drei Winkelsymmetralen sind $\mathbf{u} + \lambda_1(\frac{1}{c}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) - \frac{1}{b}(\mathbf{w} - \mathbf{u}))$, $\mathbf{v} + \lambda_2(\frac{1}{c}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - \frac{1}{a}(\mathbf{w} - \mathbf{v}))$ und $\mathbf{w} + \lambda_3(\frac{1}{b}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \frac{1}{a}(\mathbf{v} - \mathbf{w}))$. Setzt man $\lambda_1 = \frac{bc}{2(s-c)}$ in der ersten Parameterdarstellung, $\lambda_2 = \frac{ac}{2(s-c)}$ in der zweiten und $\lambda_3 = \frac{ab}{2(s-c)}$ in der dritten, dann erhält man jedes Mal \mathbf{m}_c . Somit ist \mathbf{m}_c der Ortsvektor zu einem Punkt, der auf diesen Winkelsymmetralen liegt. Das ist der Ankreismittelpunkt I_c .

Auf analoge Weise findet man die anderen Ankreismittelpunkte. \square

Das folgende Lemma zeigt, wie man Längen von beliebigen Linearkombinationen der „Basisvektoren“ \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} bestimmen kann. Wir werden es verwenden, um Abstände zwischen den oben eingeführten besonderen Punkten des Dreiecks U , I und I_a , I_b , I_c zu berechnen. Die EULER-Formel ist ja gerade eine Aussage über deren Abstände.

Lemma Für beliebige reelle Zahlen d_a , d_b und d_c gilt

$$\|d_a\mathbf{u} + d_b\mathbf{v} + d_c\mathbf{w}\|^2 = r^2(d_a + d_b + d_c)^2 - (a^2d_b d_c + b^2d_a d_c + c^2d_a d_b)$$

Beweis Es gilt $c^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Wegen $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = r$ erhalten wir $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = r^2 - \frac{1}{2}c^2$. Ebenso ergibt sich $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = r^2 - \frac{1}{2}b^2$ und $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = r^2 - \frac{1}{2}a^2$. Wenn wir auch $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = r$ verwenden, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \|d_a\mathbf{u} + d_b\mathbf{v} + d_c\mathbf{w}\|^2 &= \langle d_a\mathbf{u} + d_b\mathbf{v} + d_c\mathbf{w}, d_a\mathbf{u} + d_b\mathbf{v} + d_c\mathbf{w} \rangle \\ &= d_a^2\|\mathbf{u}\|^2 + d_b^2\|\mathbf{v}\|^2 + d_c^2\|\mathbf{w}\|^2 + 2d_a d_b \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + 2d_a d_c \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + 2d_b d_c \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \\ &= r^2(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + 2d_a d_b + 2d_a d_c + 2d_b d_c) - c^2d_a d_b - b^2d_a d_c - a^2d_b d_c \end{aligned}$$

Das ist bereits das gewünschte Ergebnis. \square

Dieses Lemma stellt also für unsere Methode ein maßgeschneidertes Werkzeug zur Bestimmung von Längen dar. Es basiert nur auf der Wahl des Koordinatenursprungs im Umkreismittelpunkt U des Dreiecks $\triangle ABC$ und den Eigenschaften des inneren Produkts.

Wir beweisen nun die EULER-Formel für den Inkreismittelpunkt I (Satz 5) und den Ankreismittelpunkt I_c (Satz 6) mit Hilfe des Lemmas, indem wir die jeweiligen Linearkombinationen von \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} aus den Sätzen 3 und 4 dort einsetzen. Darüber hinaus verwenden wir die Formeln $\varrho = \frac{F}{s}$, $\varrho_c = \frac{F}{s-c}$ und $r = \frac{abc}{4F}$ für den Inkreisradius ϱ , den Ankreisradius ϱ_c und den Umkreisradius r , dabei ist F der Flächeninhalt des Dreiecks ([1], S. 33 f.). Insbesondere gilt also $\varrho r = \frac{abc}{4s}$ und $\varrho_c r = \frac{abc}{4(s-c)}$.

Satz 5 (Euler-Formel, Teil 1) Es gilt $|UI|^2 = r^2 - 2\varrho r$.

Beweis Es gilt $\overrightarrow{UI} = \mathbf{m} = d_a \mathbf{u} + d_b \mathbf{v} + d_c \mathbf{w}$ mit $d_a = \frac{a}{2s}$, $d_b = \frac{b}{2s}$ und $d_c = \frac{c}{2s}$ nach Satz 3. Es folgt $d_a + d_b + d_c = 1$ und

$$a^2 d_b d_c + b^2 d_a d_c + c^2 d_a d_b = \frac{abc}{4s^2} (a + b + c) = \frac{abc}{2s} = 2\varrho r$$

Die Formel ergibt sich nun aus dem Lemma. \square

Unmittelbar einsichtig daraus ist das

Korollar Der Umkreisradius r eines Dreiecks ist mindestens gleich dem Durchmesser 2ρ des Inkreises dieses Dreiecks: $r \geq 2\rho$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

Satz 6 (Euler-Formel, Teil 2) Es gilt $|UI_c|^2 = r^2 + 2r\varrho_c$.

Beweis Es gilt $\overrightarrow{UI_c} = \mathbf{m}_c = d_a \mathbf{u} + d_b \mathbf{v} + d_c \mathbf{w}$ mit $d_a = \frac{a}{2(s-c)}$, $d_b = \frac{b}{2(s-c)}$ und $d_c = \frac{c}{2(s-c)}$ nach Satz 4. Es folgt $d_a + d_b + d_c = 1$ und

$$a^2 d_b d_c + b^2 d_a d_c + c^2 d_a d_b = \frac{-abc}{4(s-c)^2} (a + b - c) = \frac{-abc}{2(s-c)} = -2r\varrho_c$$

Die Formel ergibt sich wieder aus dem Lemma. \square

Wir bereiten nun den Satz von FEUERBACH in zwei Teilen, das sind die Sätze 7 und 8, vor. Die Beweise folgen demselben Schema wie jene für die EULER-Formel. Außerdem verwenden wir die HERON-Formel $F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ für die Fläche F des Dreiecks ([1], S. 31). Diese kann man auch als $16F^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$ schreiben.

Satz 7 Es gilt $|IN| = \frac{1}{2}r - \varrho$.

Beweis Es gilt $\overrightarrow{IN} = \mathbf{n} - \mathbf{m} = d_a \mathbf{u} + d_b \mathbf{v} + d_c \mathbf{w}$ mit $d_a = \frac{s-a}{2s}$, $d_b = \frac{s-b}{2s}$ und $d_c = \frac{s-c}{2s}$ nach Satz 1 und Satz 3. Es folgt $d_a + d_b + d_c = \frac{1}{2}$ und

$$\begin{aligned} & a^2 d_b d_c + b^2 d_a d_c + c^2 d_a d_b \\ &= \frac{1}{16s^2} (a^2(a^2 - (b-c)^2) + b^2(b^2 - (a-c)^2) + c^2(c^2 - (a-b)^2)) \\ &= \frac{1}{16s^2} (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 2abc(a+b+c)) \\ &= -\frac{F^2}{s^2} + \frac{abc}{4s} = -\varrho^2 + \varrho r \end{aligned}$$

Das Lemma ergibt $|IN|^2 = \frac{1}{4}r^2 + \varrho^2 - \varrho r = (\frac{1}{2}r - \varrho)^2$. Aus dem Korollar zu Satz 5 folgt $\frac{1}{2}r \geq \varrho$. Wir ziehen die Wurzel und erhalten $|IN| = \frac{1}{2}r - \varrho$. \square

Satz 8 Es gilt $|I_c N| = \frac{1}{2}r + \varrho_c$.

Beweis Es gilt $\overrightarrow{I_c N} = \mathbf{n} - \mathbf{m}_c = d_a \mathbf{u} + d_b \mathbf{v} + d_c \mathbf{w}$ mit $d_a = -\frac{s-b}{2(s-c)}$, $d_b = -\frac{s-a}{2(s-c)}$ und $d_c = \frac{s}{2(s-c)}$ nach Satz 1 und Satz 4. Es folgt $d_a + d_b + d_c = \frac{1}{2}$ und

$$\begin{aligned} & a^2 d_b d_c + b^2 d_a d_c + c^2 d_a d_b \\ &= \frac{1}{16(s-c)^2} (a^2(a^2 - (b+c)^2) + b^2(b^2 - (a+c)^2) + c^2(c^2 - (a-b)^2)) \\ &= \frac{1}{16(s-c)^2} (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 - 2abc(a+b-c)) \\ &= -\frac{F^2}{(s-c)^2} - \frac{abc}{4(s-c)} = -\varrho_c^2 - \varrho_c r \end{aligned}$$

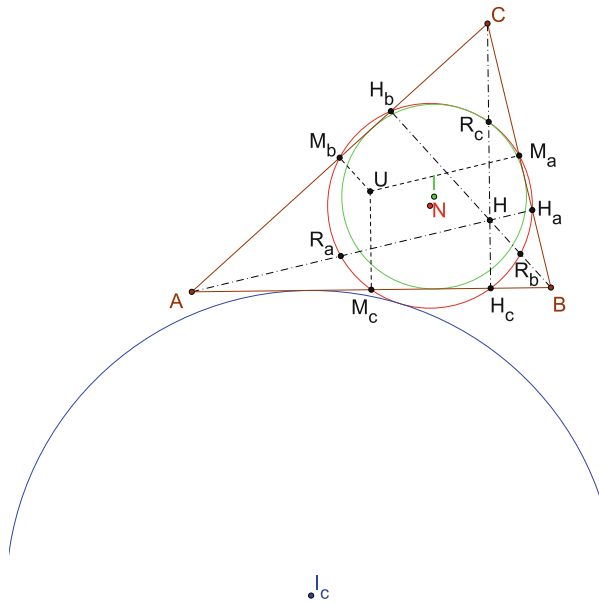
Das Lemma ergibt $|I_c N|^2 = \frac{1}{4}r^2 + \varrho_c^2 + \varrho_c r = (\frac{1}{2}r + \varrho_c)^2$. Es folgt $|I_c N| = \frac{1}{2}r + \varrho_c$. \square

Aus Satz 7 folgt, dass der Inkreis den Neunpunktekreis von innen berührt, da $\frac{1}{2}r$ nach Satz 2 der Radius des Neunpunktekreises ist. Ebenso folgt aus Satz 8, dass der Ankreis an die Seite c den Neunpunktekreis von außen berührt. Das gilt natürlich auch für die anderen Ankreise. Insgesamt ist das der

Satz 9 (Feuerbach) Der Neunpunktekreis eines Dreiecks wird vom Inkreis von innen und von den Ankreisen des Dreiecks von außen berührt.

In Abb. 1 ist das Szenario des Satzes von FEUERBACH dargestellt: ein Dreieck $\triangle ABC$ mit seinem Inkreis mit Mittelpunkt I , dem Neunpunktekreis mit Mittelpunkt N und einem Ankreis mit Mittelpunkt I_c . Die strichpunktierten Strecken

Abb. 1 Dreieck $\triangle ABC$ mit Neunpunktekreis, Inkreis und Ankreis



verbinden einen Eckpunkt mit dem zugehörigen Höhenfußpunkt, die strichlierten den Umkreismittelpunkt mit den Seitenmitten.

Man kann mit dieser Methode auch andere Abstände berechnen. Eine schöne Formel ist die folgende.

Satz 10 Es gilt $|UH|^2 = 9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

Beweis Folgt aus dem Lemma mit $d_a = d_b = d_c = 1$, da $\overrightarrow{UH} = \mathbf{h} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ gilt. \square

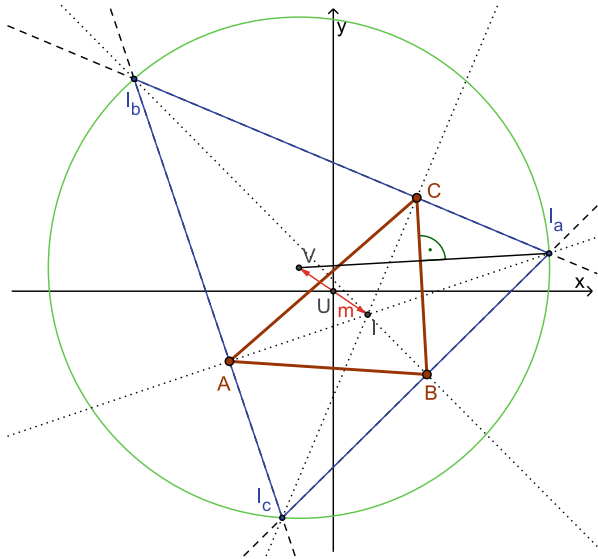
3 Kollineare Punkte des Dreiecks und ihre Abstandsverhältnisse

Wir führen fünf weitere besondere Punkte des Dreiecks ein und berechnen deren Ortsvektoren. Daraus werden wir Kollinearitäten dieser Punkte erkennen und weiterhin die Abstandsverhältnisse zwischen ihnen. Wir beginnen „zum Aufwärmen“ mit dem Schwerpunkt und folgen einfach seiner Konstruktion.

Satz 11 Der Ortsvektor des Schwerpunktes S ist $\frac{1}{3}\mathbf{h}$.

Beweis Geht man vom Eckpunkt A aus zwei Drittel der Schwerlinie entlang, dann kommt man zum Punkt mit Ortsvektor $\mathbf{u} + \frac{2}{3}(\frac{\mathbf{v}+\mathbf{w}}{2} - \mathbf{u}) = \frac{1}{3}\mathbf{u} + \frac{1}{3}\mathbf{v} + \frac{1}{3}\mathbf{w} = \frac{1}{3}\mathbf{h}$. Dasselbe kann man auch vom Eckpunkt B und Eckpunkt C aus machen. Man erhält jedes Mal $\frac{1}{3}\mathbf{h}$. Der Punkt mit Ortsvektor $\frac{1}{3}\mathbf{h}$ liegt auf allen drei Schwerlinien und teilt diese im Verhältnis 2 : 1. Dieser Punkt ist somit der Schwerpunkt S . \square

Abb. 2 BEVAN-Punkt V und Inkreismittelpunkt I



Das Ergebnis ist natürlich nicht überraschend, wenn wir uns die EULER-Gerade vor Augen halten. Sie enthält bekanntlich die besonderen Punkte U , S und H , wobei S die Strecke \overline{UH} im Verhältnis $1 : 2$ teilt. Die aus der Schule bekannte Formel $S = \frac{1}{3}(A + B + C)$ (z.B. in [5], S. 16) in Verbindung mit Satz 1 führt ebenfalls auf Satz 11. Allerdings ist eines schon bemerkenswert: die Existenz des Schnittpunktes der Schwerlinien wird so – verglichen mit anderen schulnahen Begründungen (siehe z.B. [10], S. 92 f.) – sehr einfach bewiesen.

Der BEVAN-Punkt V des Dreiecks $\triangle ABC$ ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle I_a I_b I_c$, dessen Eckpunkte die Ankreismittelpunkte sind. In Abb. 2 ist zu erkennen, dass der Ortsvektor von V der gegengleich orientierte Ortsvektor des Inkreismittelpunktes I ist. Das heißt, dass der BEVAN-Punkt der am Umkreismittelpunkt gespiegelte Inkreismittelpunkt eines Dreiecks ist. Außerdem steht die Strecke von V nach I_a senkrecht auf die Dreiecksseite \overline{BC} . Mittels dynamischer Geometriesoftware überzeugt man sich, dass beide Beobachtungen kein Zufall sind. So kann der folgende Satz motiviert werden. Auch der Einsatz des Lemmas kommt nicht unvermutet, denn wir kennen die Linearkombinationen von \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} der involvierten Punkte.

Satz 12 *Der Ortsvektor des Bevan-Punktes V ist $-\mathbf{m}$. Weiterhin gilt $\overline{VI_a} \perp \overline{BC}$, $\overline{VI_b} \perp \overline{AC}$ und $\overline{VI_c} \perp \overline{AB}$.*

Beweis Wir wählen V als den Punkt, dessen Ortsvektor $-\mathbf{m}$ ist und zeigen, dass er der BEVAN-Punkt ist.

Es gilt $\overrightarrow{VI_c} = \mathbf{m}_c + \mathbf{m} = d_a \mathbf{u} + d_b \mathbf{v} + d_c \mathbf{w}$ mit $d_a = \frac{a}{2s} + \frac{a}{2(s-c)} = \frac{a(a+b)}{2s(s-c)}$, $d_b = \frac{b}{2s} + \frac{b}{2(s-c)} = \frac{b(a+b)}{2s(s-c)}$ und $d_c = \frac{c}{2s} - \frac{c}{2(s-c)} = \frac{-c^2}{2s(s-c)}$ nach Satz 3 und Satz 4. Es folgt $d_a + d_b + d_c = 2$ und

$$\begin{aligned}
& a^2 d_b d_c + b^2 d_a d_c + c^2 d_a d_b \\
&= \frac{1}{4s^2(s-c)^2} (-a^2 b c^2 (a+b) - b^2 a c^2 (a+b) + c^2 a b (a+b)^2) \\
&= \frac{a b c^2 (a+b)}{4s^2(s-c)^2} (-a-b+a+b) = 0
\end{aligned}$$

Das Lemma ergibt $|VI_c|^2 = 4r^2$. Es folgt $|VI_c| = 2r$. Ganz analog zeigt man, dass auch $|VI_a| = 2r$ und $|VI_b| = 2r$ gilt. Somit ist V der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle I_a I_b I_c$, das heißt der BEVAN-Punkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Der Radius des Umkreises ist $2r$.

Nun zur zweiten Aussage. Wir zeigen $\overline{VI_c} \perp \overline{AB}$. Es gilt

$$\langle \mathbf{m}_c + \mathbf{m}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle = (d_a - d_b) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - d_a \|\mathbf{u}\|^2 + d_b \|\mathbf{v}\|^2 + d_c \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - d_c \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$

Setzt man $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ und $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ wie im Beweis des Lemmas ein, und d_a , d_b und d_c wie im ersten Teil dieses Beweises, dann erhält man $\langle \mathbf{m}_c + \mathbf{m}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle = 0$. Somit steht $\overline{VI_c}$ senkrecht auf \overline{AB} . Analog zeigt man $\overline{VI_b} \perp \overline{AC}$ und $\overline{VI_a} \perp \overline{BC}$.

□

In den Beweis des zweiten Teils von Satz 12 gehen also grundlegende Eigenschaften des Skalarprodukts ein, die auf die „Elementarprodukte“ $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\|\mathbf{u}\|^2$ etc. der Ortsvektoren der Eckpunkte A , B und C miteinander und mit sich selbst führen, die das Lemma bereitstellt. Sie hängen nur von r und den Seitenlängen des Dreiecks $\triangle ABC$ ab.

Der SPIEKER-Punkt K des Dreiecks $\triangle ABC$ ist der Inkreismittelpunkt des Seitenmittendreiecks $\triangle M_a M_b M_c$, dessen Seiten parallel zu jenen des ursprünglichen Dreiecks liegen und halb so lang sind wie jene (Satz vom Mittendreieck, z.B. [10], S. 63). Um seinen Ortsvektor zu finden, analysieren wir seine Darstellung als Schnittpunkt der entsprechenden Winkelsymmetralen, die wir in Parameterdarstellung angeben.

Satz 13 *Der Ortsvektor zum Spieker-Punkt K ist $\frac{1}{2}\mathbf{h} - \frac{1}{2}\mathbf{m}$.*

Beweis Den SPIEKER-Punkt finden wir als Schnittpunkt der drei Winkelsymmetralen des Seitenmittendreiecks. Parameterdarstellungen dieser Winkelsymmetralen sind $\frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - \lambda_1(\frac{1}{c}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \frac{1}{b}(\mathbf{w} - \mathbf{u}))$, $\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - \lambda_2(\frac{1}{c}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \frac{1}{a}(\mathbf{w} - \mathbf{v}))$ und $\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \lambda_3(\frac{1}{b}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \frac{1}{a}(\mathbf{v} - \mathbf{w}))$. Setzt man $\lambda_1 = \frac{bc}{4s}$ in der ersten Parameterdarstellung, $\lambda_2 = \frac{ac}{4s}$ in der zweiten und $\lambda_3 = \frac{ab}{4s}$ in der dritten, dann erhält man jedes Mal $\frac{b+c}{4s}\mathbf{u} + \frac{a+c}{4s}\mathbf{v} + \frac{a+b}{4s}\mathbf{w}$. Man rechnet nach, dass das gleich $\frac{1}{2}\mathbf{h} - \frac{1}{2}\mathbf{m}$ ist. Somit ist $\frac{1}{2}\mathbf{h} - \frac{1}{2}\mathbf{m}$ der Ortsvektor zu einem Punkt, der auf allen drei Winkelsymmetralen liegt. Das ist der SPIEKER-Punkt K . □

Mit dem nächsten Satz führen wir den NAGEL-Punkt des Dreiecks $\triangle ABC$ ein. Die Gerade durch zwei Punkte P und Q bezeichnen wir mit $\ell(P, Q)$.

Satz 14 Sei G_a der Punkt, in dem der Ankreis die Seite \overline{BC} berührt, sei G_b der Punkt, in dem der Ankreis die Seite \overline{AC} berührt und G_c der Punkt, in dem der Ankreis die Seite \overline{AB} berührt. Die Geraden $\ell(A, G_a)$, $\ell(B, G_b)$ und $\ell(C, G_c)$ schneiden einander in einem Punkt G , dem Nagel-Punkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Sein Ortsvektor ist $\mathbf{g} = \frac{s-a}{s}\mathbf{u} + \frac{s-b}{s}\mathbf{v} + \frac{s-c}{s}\mathbf{w} = \mathbf{h} - 2\mathbf{m}$.

Bemerkung: Im Gegensatz zum BEVAN-Punkt (als Umkreismittelpunkt) und zum SPIEKER-Punkt (als Inkreismittelpunkt) ist die Existenz des NAGEL-Punktes nicht selbstverständlich. Ihr Nachweis ist quasi ein „Nebenprodukt“ des Beweises von Satz 14.

Beweis Der Punkt G_c hat Abstand $s-b$ zum Eckpunkt A (z. B. [10], S. 217 ff.). Sein Ortsvektor \mathbf{g}_c ist somit $\mathbf{u} + \frac{s-b}{c}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \frac{s-a}{c}\mathbf{u} + \frac{s-b}{c}\mathbf{v}$. Die Ortsvektoren \mathbf{g}_a und \mathbf{g}_b zu den Punkten G_a und G_b sind $\frac{s-b}{a}\mathbf{v} + \frac{s-c}{a}\mathbf{w}$ und $\frac{s-a}{b}\mathbf{u} + \frac{s-c}{b}\mathbf{w}$. Sei $\mathbf{g} = \frac{s-a}{s}\mathbf{u} + \frac{s-b}{s}\mathbf{v} + \frac{s-c}{s}\mathbf{w}$. Dann gilt $\mathbf{g} = \mathbf{u} + \frac{a}{s}(\mathbf{g}_a - \mathbf{u}) = \mathbf{v} + \frac{b}{s}(\mathbf{g}_b - \mathbf{v}) = \mathbf{w} + \frac{c}{s}(\mathbf{g}_c - \mathbf{w})$. Somit ist \mathbf{g} der Ortsvektor eines Punktes G , der auf allen drei Geraden $\ell(A, G_a)$, $\ell(B, G_b)$ und $\ell(C, G_c)$ liegt. Er kann auch als $\mathbf{h} - 2\mathbf{m}$ geschrieben werden, wie man durch Nachrechnen leicht sieht. \square

Durch zyklische Vertauschung sieht man, dass der Abstand von G_a zum Eckpunkt B gleich $s-c$ ist und der von G_b zu C gleich $s-a$ ist. Mit der Umkehrung des Satzes von CEVA kann so ebenfalls die Existenz des NAGEL-Punktes bewiesen werden. Der Aufwand ist insgesamt aber höher.

Sei L der Punkt, den man erhält, wenn man den Höhenschnittpunkt H am Umkreismittelpunkt U spiegelt. Da U der Nullpunkt des Koordinatensystems ist, ist $-\mathbf{h}$ der Ortsvektor des Punktes L . Man nennt L den LONGCHAMPS-Punkt des Dreiecks $\triangle ABC$.

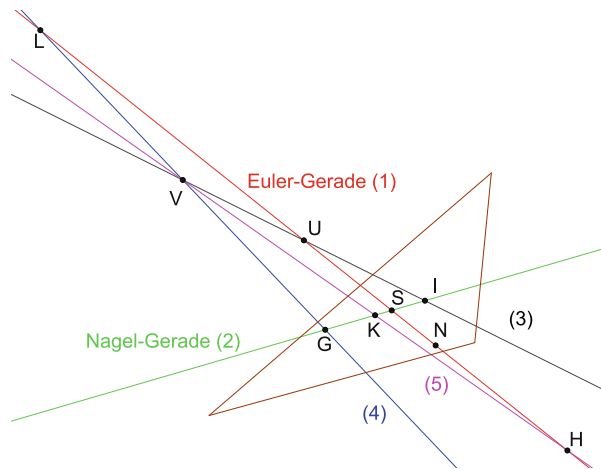
Die folgende Tabelle fasst die bisherigen Ergebnisse zusammen:

Punkt	L	U	S	H	G	K	I	V	N
Ortsvektor	$-\mathbf{h}$	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{3}\mathbf{h}$	\mathbf{h}	$\mathbf{h} - 2\mathbf{m}$	$\frac{1}{2}\mathbf{h} - \frac{1}{2}\mathbf{m}$	\mathbf{m}	$-\mathbf{m}$	$\frac{1}{2}\mathbf{h}$

Die Ortsvektoren von neun besonderen Punkten eines Dreiecks lassen sich also als (einfache) Linearkombinationen der Ortsvektoren des Höhenschnittpunktes und des Inkreismittelpunktes dieses Dreiecks darstellen (und damit der Ortsvektoren seiner Eckpunkte), davon sind sechs (mehr oder weniger) nichttrivial, wenn man den Umkreismittelpunkt in den Ursprung des Koordinatensystems legt! Jetzt ist es einfach, Geraden zu finden, auf denen mehr als zwei besondere Punkte liegen:

1. Mit den Ergebnissen aus der Tabelle sehen wir $\overrightarrow{LU} = \mathbf{h}$, $\overrightarrow{US} = \frac{1}{3}\mathbf{h}$, $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{6}\mathbf{h}$ und $\overrightarrow{NH} = \frac{1}{2}\mathbf{h}$. Somit liegen die fünf Punkte L , U , S , N und H in dieser Reihenfolge auf einer Geraden (EULER-Gerade) und „teilen diese“ im Verhältnis $6 : 2 : 1 : 3$.
2. Es folgt weiterhin $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{2}(3\mathbf{m} - \mathbf{h})$, $\overrightarrow{KS} = \frac{1}{6}(3\mathbf{m} - \mathbf{h})$ und $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}(3\mathbf{m} - \mathbf{h})$. Somit liegen die vier Punkte G , K , S und I in dieser Reihenfolge auf einer Geraden (NAGEL-Gerade) und „teilen diese“ im Verhältnis $3 : 1 : 2$.

Abb. 3 Neun besondere Punkte des Dreiecks und ihre Lagebeziehungen



3. Wegen $\overrightarrow{VU} = \mathbf{m} = \overrightarrow{UI}$ ist U der Mittelpunkt der Strecke \overline{VI} .
4. Aus $\overrightarrow{GV} = \mathbf{m} - \mathbf{h} = \overrightarrow{VL}$ schließen wir, dass V der Mittelpunkt der Strecke \overline{GL} ist.
5. Schließlich gilt auch $\overrightarrow{VK} = \frac{1}{2}\mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{m} = \overrightarrow{KH}$. Somit ist K der Mittelpunkt der Strecke \overline{VH} .

Abb. 3 zeigt eine Übersicht über die Ergebnisse (1) bis (5).

Beim gleichseitigen Dreieck fallen alle diese Punkte zusammen.

4 Resümee

Es gibt mehrere Methoden, Beweise in der EUKLID'schen Geometrie bzw. spezieller in der Dreiecksgeometrie zu führen: elementargeometrische (wichtige Werkzeuge sind der Satz des PYTHAGORAS, der Strahlensatz und der Peripheriewinkelsatz), trigonometrische (Sinussatz, Cosinussatz) und analytische. Bei letzteren kann zwischen koordinatenfreien oder mit Koordinaten arbeitenden Zugängen (vgl. [3]) unterschieden werden. In der Schule wird üblicherweise Koordinatengeometrie beim Thema „Analytische Geometrie“ in der Sekundarstufe 2 betrieben (vgl. z.B. die Schulbücher [4] und [5]), während koordinatenfreie Beschreibungen geometrischer Situationen sich meist auf allgemeine Zusammenhänge beschränken, wie man sie in einer Formelsammlung findet. Ausnahmen sind z.B. die Herleitung der Schwerpunktformel $S = \frac{1}{3}(A + B + C)$ für ein Dreieck $\triangle ABC$ ([5], S. 17, dort ist auch von „Vektorgleichungen“ die Rede, und es finden sich einige einfache Beweisaufgaben, die mittels Vektorgleichungen zu lösen sind), oder „Blüten“ aus der New Math-Bewegung, z.B. wird in [11] unter „Anwendungen des skalaren Produktes“ (S. 151 ff.) u.a. die Flächenformel von HERON mit Vektorgleichungen bewiesen (S. 157). Ein Beispiel neueren Datums für koordinatenfreies Arbeiten mit Vektoren ist der Abschn. 3.2.5 „Nutzung von Vektoren für Beweise geometrischer Sätze“ in [7].

Die Eigenschaften des skalaren Produkts sind die wesentlichen Werkzeuge in der Beweisführung der vorliegenden Arbeit (vgl. z.B. den Beweis des zentralen Lemmas, das u.a. auch beim Beweis von Satz 12 zum Tragen kommt, oder den Beweis des Satzes 1). Sie werden auch schon in der Schule thematisiert (z.B. [4], S. 241). Damit verbunden ist natürlich der Normbegriff. Eine spezielle Lage des Dreiecks $\triangle ABC$, nämlich seinen Umkreismittelpunkt in den Ursprung des Koordinatensystems zu setzen, eröffnet einfache Berechnungsmöglichkeiten, die auf der Identität $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = r$ basieren.

Abb. 2 zeigt exemplarisch eine Stärke des Arbeitens mit koordinatenfreien Vektoren. Die Formulierung der Beziehung zwischen den Ortsvektoren des BEVAN-Punktes und des Inkreismittelpunktes ist unabhängig davon, wie das Dreieck $\triangle ABC$ „in seinem Umkreis“ liegt (mehr noch: sie bleibt erhalten bei allen Veränderungen des Dreiecks, die den Umkreismittelpunkt im Ursprung lassen): der Ortsvektor von V ist $-\mathbf{m}$. Die Koordinaten der Ortsvektoren ändern sich natürlich beim Drehen des Dreiecks um seinen Umkreismittelpunkt.

Die in dieser Arbeit gezeigte Methode scheint in ihren Anwendungsmöglichkeiten (in der EUKLID'schen Dreiecksgeometrie) begrenzt zu sein. Die Rechnungen funktionieren, ein roter Faden der Beweisstrategien über die eben gegebenen allgemeinen Bemerkungen hinaus ist allerdings nicht zu erkennen (vgl. die Beweise der Sätze 12, 13 und 14 miteinander). Ob ihrer einfachen Nachvollziehbarkeit und Kürze (vgl. [2], S. 37 ff.) können sie aber ein zentrales Theorem in der Dreiecksgeometrie, den Satz von FEUERBACH („This is perhaps the most famous of all theorems of the triangle, aside from those known in ancient times.“ in [9], S. 200; „[...] the following theorem [...] is truly remarkable.“ in [6], S. 96), einer breiten, interessierten Leser/innerschaft zugänglich machen.

Open access funding provided by University of Vienna.

Open Access Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden.

Literatur

1. Agricola, I., Friedrich, T.: Elementargeometrie, 2. Aufl. Vieweg+Teubner, Wiesbaden (2009)
2. Donath, E.: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1969)
3. Götz, S., Hofbauer, F.: Immer geradeaus in Dreiecken! Orientierung, Manifestierung und Erkundung (in) einer elementargeometrischen Landschaft. Prax. Math. Sch. **54** (44), 35–39 (2012). Mit einer Online-Ergänzung
4. Götz, S., Reichel, H.-C. (Hrsg.): Mathematik 5 von R. Müller und G. Hanisch. öbv, Wien (2010)
5. Götz, S., Reichel, H.-C. (Hrsg.): Mathematik 6 von R. Müller und G. Hanisch. öbv, Wien (2010)
6. Hahn, L.: Complex Numbers and Geometry. The Mathematical Association of America, Washington DC (1994)
7. Henn, H.-W., Filler, A.: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2015)
8. Honsberger, R.: Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. The Mathematical Association of America, Washington DC (1995)

9. Johnson, R.: Advanced Euclidean Geometry. An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle. Dover Publications, New York (1960)
10. Krauter, S.: Erlebnis Elementargeometrie. Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken. Elsevier Spektrum Akademischer Verlag, München (2005)
11. Laub, J., et al.: Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen Bd. 2. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien (1979)
12. Scheer, M.: A Simple Vector Proof of Feuerbach's Theorem. Forum Geom. **11**, 205–210 (2011)